

Модел. и анализ информ. систем. Т. 21, № 1 (2014) 73–88  
 ©Алешин С. В., Кащенко С. А., 2014

УДК 517.929

## Локальная динамика логистического уравнения, содержащего запаздывание

Алешин С. В., Кащенко С. А.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
 150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: [fktbody@yandex.ru](mailto:fktbody@yandex.ru), [kash@uniyar.ac.ru](mailto:kash@uniyar.ac.ru)

получена 20 февраля 2014

**Ключевые слова:** логистическое уравнение, релаксационный цикл, нормальная форма, состояние равновесия

Рассматривается логистическое уравнение с добавлением слагаемого, характеризующего запаздывание. Исследуется локальная динамика этого уравнения. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Используются стандартные бифуркационные методы Андронова–Хопфа для уравнений с запаздыванием и разработанный одним из авторов асимптотический метод, основанный на построении специальных эволюционных уравнений, которые и определяют локальную динамику уравнений, содержащих запаздывание. Показано, что в зависимости от одного из параметров уравнения либо все решения стремятся к состоянию равновесия, либо выходят на единственный устойчивый цикл. Приведены результаты численного исследования. Отмечено хорошее совпадение результатов численного моделирования с утверждениями аналитического плана.

## Постановка задачи

Логистическое уравнение

$$\dot{u} = r[1 - u]u \quad (r > 0) \quad (1)$$

обладает простой динамикой. Все решения с положительными начальными условиями стремятся к 1 при  $t \rightarrow \infty$ . Динамика логистического уравнения с запаздыванием (уравнения Хатчинсона)

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u \quad (r, T > 0) \quad (2)$$

существенно богаче. При  $rT \leq \frac{37}{24}$  все решения (2) с положительной начальной функцией тоже стремятся к 1 при  $t \rightarrow \infty$  [1]. При  $\lambda = rT \leq \frac{\pi}{2}$  состояние равновесия  $u_0 \equiv 1$  асимптотически устойчиво, а при  $\lambda = rT > \frac{\pi}{2}$  это уравнение имеет

периодическое решение  $u_0(t, \lambda)$  [2]. При достаточно малых значениях  $\lambda - \frac{\pi}{2}$  и при достаточно больших  $\lambda$  этот цикл орбитально асимптотически устойчив [3]. Отметим еще, что количество неустойчивых периодических решений (2) неограниченно растет при  $\lambda \rightarrow \infty$  [4].

Здесь будет рассматриваться в некотором смысле «среднее» между (1) и (2) уравнение

$$\dot{u} = r[1 - au - bu(t - T)]u,$$

где  $a, b > 0$  и выполнено условие нормировки  $a + b = 1$ .

Удобно перейти к обозначениям  $a = \alpha$  и  $b = 1 - \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) и произвести замену времени  $t \rightarrow Tt$ . В результате приходим к уравнению

$$\dot{u} = \lambda[1 - \alpha u - (1 - \alpha)u(t - 1)]u, \quad \lambda = Tr. \quad (3)$$

Начальные функции  $\varphi \in C_{[-1,0]}$  для уравнения (3) предполагаются неотрицательными. Решения с этими начальными функциями остаются неотрицательными при увеличении  $t$ . Как и в [3], можно показать, что все (неотрицательные) решения (3) удовлетворяют при достаточно больших  $t$  оценке

$$u \leq \min(\alpha^{-1}, \exp(\lambda(1 - \alpha))).$$

У всех уравнений (1), (2) и (3) нулевое решение неустойчиво. Устойчивость состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$  в (3) определяется расположением корней характеристического уравнения

$$\mu = -\lambda[\alpha + (1 - \alpha)\exp(-\mu)]. \quad (4)$$

Сформулируем два простых утверждения о расположении корней уравнения (4).

**Лемма 1.** Пусть  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Тогда все корни (4) имеют отрицательные вещественные части.

**Лемма 2.** Пусть  $\alpha < \frac{1}{2}$ . Тогда все корни (4) удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \mu \leq \ln \frac{b}{a}.$$

В условии леммы 1 все (положительные) решения (3) стремятся к 1 при  $t \rightarrow \infty$ , а в условиях леммы 2 они ограничены по  $\lambda$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Эти утверждения уже указывают на существенные отличия динамических свойств (2) и (3).

В первых двух разделах исследуется поведение решений (3) в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$ . В первом разделе рассматривается простейший — «регулярный» случай, основанный на бифуркации Андронова–Хопфа. Важную роль играет расположение корней (4). При каждом  $\alpha < \frac{1}{2}$  найдется такое значение  $\lambda_0(\alpha) > 0$ , что при  $\lambda < \lambda_0(\alpha)$  все корни (4) имеют отрицательные вещественные части, а при  $\lambda > \lambda_0(\alpha)$  имеются корни с положительной вещественной частью. Будет исследовано поведение решений (3) при условии  $|\lambda - \lambda_0(\alpha)| \ll 1$ .

Отметим, что  $\lambda_0(0) = \frac{\pi}{2}$  и  $\lambda_0(\alpha) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow \frac{1}{2} - 0$ . Отличие динамических свойств решений уравнений (2) и (3) ярче проявляется при условии, когда

$$\varepsilon = \lambda^{-1} \ll 1. \quad (5)$$

В следующем разделе предполагается, что вместе с условием (5) выполнено условие  $\alpha = \frac{1}{2} - \nu$ , где

$$|\nu| \ll 1. \quad (6)$$

Исследуется вопрос о локальной — в некоторой достаточно малой (и независимой от  $\varepsilon$  и  $\nu$ ) окрестности состояния равновесия  $u_0$  — динамике решений уравнения (3) при условиях (5) и (6).

Для линеаризованного на  $u_0$  уравнения (3)

$$\varepsilon \dot{v} = -\frac{1}{2}[v + v(t-1) + \mu(v - v(t-1))] \quad (7)$$

характеристический квазиполином представим в виде

$$2\varepsilon\mu = -(1 + \exp(-\mu) - \nu(1 - \exp(-\mu))). \quad (8)$$

Просто показать, что (8) не имеет корней с положительными и отдельными от нуля при  $\varepsilon, \nu \rightarrow 0$  вещественными частями. Важно, что вещественные части бесконечно многих корней (8) стремятся к нулю при  $\varepsilon, \nu \rightarrow 0$ . Тем самым можно говорить о том, что в задаче об устойчивости состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$  реализуется бесконечномерный критический случай. Методики исследования динамических свойств решений в подобных ситуациях разрабатывались в [5–10]. Ниже она будет применена к изучению локальной динамики уравнения (3). В качестве основных результатов будут построены специальные нелинейные уравнения параболического и вырожденно-параболического типов, не содержащие малых параметров. Их нелокальная динамика определяет в главном поведение решений исходного уравнения при малых  $\varepsilon$  и  $\nu$ .

В следующем разделе рассмотрен «базовый» случай, когда  $\nu = c\varepsilon^2$ . Как оказывается, соответствующие решения при этом условии формируются, в основном, на невысоких модах (в параболическом уравнении). Поэтому их естественно назвать медленно осциллирующими.

В последних разделах исследуется локальное поведение нелинейной краевой задачи специального параболического типа. Проведено как аналитическое, так и численное исследование.

## 1. Бифуркация Андронова–Хопфа

Рассмотрим вопрос о поведении решений уравнения (3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$ . Это поведение во многом зависит от расположения корней характеристического квазиполинома (4). Из леммы 1 вытекает, что необходимо рассматривать лишь ситуации, когда

$$\alpha < \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Сформулируем одно простое утверждение.

**Лемма 3.** Пусть выполнено неравенство (9). Тогда найдется такое  $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha)$ , что при  $\lambda < \lambda_0(\alpha)$  все корни (4) имеют отрицательные вещественные части, а при  $\lambda > \lambda_0(\alpha)$  у уравнения (4) существует корень с положительной вещественной частью.

Отсюда следует, что при  $\lambda < \lambda_0$  все решения (3) с достаточно близкими к 1 начальными условиями стремятся к единице при  $t \rightarrow \infty$ , а при  $\lambda > \lambda_0$  состояние равновесия  $u_0 \equiv 1$  неустойчиво и задача перестает быть локальной. Здесь будет рассмотрен «пограничный» случай. Фиксируем значение  $\alpha_0$  так, чтобы  $0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}$ , и пусть для некоторых постоянных  $\lambda_1$  и  $\alpha_1$  имеем

$$\lambda = \lambda_0(\alpha_0) + \varepsilon \lambda_1, \quad \alpha = \alpha_0 + \varepsilon \lambda_1, \quad (10)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр:

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (11)$$

При  $\varepsilon = 0$  уравнение (4) имеет пару чисто мнимых корней  $\mu_{1,2} = \pm i\omega$  ( $\omega > 0$ ), а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. При условиях (10), (11) имеет место хорошо известная бифуркация Андронова–Хопфа: это означает, что в достаточно малой (и не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности  $u_0 \equiv 1$  уравнение (3) имеет локальное устойчивое двумерное инвариантное интегральное многообразие (см., например, [11, 12]). На нем это уравнение представимо (при выполнении некоторых условий типа невырожденности) в виде комплексного уравнения первого порядка

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon a_1 \xi + d|\xi|\xi + O(\varepsilon^2 + |\xi|^2). \quad (12)$$

После нормализующих замен  $\varepsilon = \varepsilon t$  и  $\xi \rightarrow \varepsilon^{1/2} \xi$  получаем, что в главном поведении решений (12) определяется уравнением — нормальной формой (см., например, [13]):

$$\frac{d\xi}{d\tau} = a_1 \xi + d|\xi|^2 \xi. \quad (13)$$

Решения уравнения (13) связаны с решениями уравнения (3) формулой

$$u = 1 + \varepsilon^{1/2}(\xi(\tau) \exp(i\omega t) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-i\omega t)) + \varepsilon u_2(\tau, t) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, t) + \dots, \quad (14)$$

в которой функции  $u_j(\tau, t)$  являются  $2\pi/\omega$ -периодическими по  $t$ . Таким образом, динамические свойства (3) в окрестности  $u_0$  определяются в главном поведением решений (13), поэтому остается лишь определить коэффициенты  $a_1$  и  $d$ . Для этого воспользуемся формальным рядом (14). Подставим его в (3) и в получившемся формальном тождестве будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Так, на втором шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^1$ , определим функцию  $u_2(\tau, t)$ :

$$u_2(\tau, t) = g\xi^2 \exp(2i\omega t) + \bar{g}\bar{\xi}^2 \exp(-2i\omega t),$$

где

$$g = \lambda_0(1 - \alpha_0)i \sin \omega \cdot [2i\omega + \alpha_0\lambda_0 + (1 - \alpha_0)\lambda_0 \exp(-2i\omega)]^{-1}.$$

На третьем шаге собираем коэффициенты при  $\varepsilon^{3/2}$ . Из условий разрешимости получающегося уравнения относительно  $2\pi$ -периодической по  $t$  функции  $u_3(\tau, t)$  приходим к уравнению (13) для неизвестной амплитуды  $\xi(\tau)$ , в котором

$$a_1 = -[1 - (1 - \alpha_0)\lambda_0 \exp(-i\omega)]^{-1} \cdot [\lambda_1(1 + (1 - \alpha_0)\exp(-i\omega)) + \lambda_0\alpha_1(1 + \exp(-i\omega))],$$

$$d = -\lambda_0^2[1 - \lambda_0(1 - \alpha_0)\exp(-i\omega)]^{-1} \cdot [2\alpha_0 + (1 - \alpha_0)(\exp(i\omega) + \exp(-2i\omega))] \times \\ \times (1 - \alpha_0)i \sin \omega \cdot [2i\omega + \alpha_0\lambda_0 + (1 - \alpha_0)\lambda_0] \exp(-2i\omega)]^{-1}.$$

Отметим, что устойчивость нулевого решения в (13) определяется знаком выражения  $\operatorname{Re} a_1$ , а при условиях  $\operatorname{Re} a_1 > 0$  и  $\operatorname{Re} d < 0$  это уравнение имеет устойчивые периодические решения  $\xi_0(\tau) = \rho_0 \exp(i\varphi_0\tau)$ , где

$$\rho_0 = [(-\operatorname{Re} a_1)(\operatorname{Re} d)^{-1}]^{1/2},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{Im} a_1 + \rho_0^2 \operatorname{Im} d.$$

Сформулируем для примера соответствующий результат.

**Теорема 1.** Пусть  $\operatorname{Re} a_1 > 0$  и  $\operatorname{Re} d < 0$ . Тогда существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  уравнение (3) имеет асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение  $u_0(t, \varepsilon)$  периода  $T(\varepsilon) = 2\pi\omega^{-1}(1 + \varepsilon\varphi_0\omega^{-1} + o(\varepsilon^2))$  и  $u_0(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/2}\rho_0 \cos[(\omega + \varepsilon\varphi_0 + o(\varepsilon^2))t] + o(\varepsilon)$ .

Отметим, что при  $\alpha_1 = 0$  и  $\lambda_1 > 0$  выполнено условие  $\operatorname{Re} a_1 > 0$ , а при  $\lambda_1 = 0$  и  $\alpha_1 > 0$  имеем неравенство  $\operatorname{Re} a_1 < 0$ . При достаточно малых значениях параметра  $\alpha_0$  параметры в (3) близки к параметрам в (2), а значит,  $\omega \sim \pi/2$  и  $\operatorname{Re} d < 0$  [3].

Покажем, что количество различных периодических решений уравнения (3) неограниченно растет при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Воспользуемся построениями из [4]. Пусть  $\alpha_1 = 0$ . Сначала заметим, что при изменении параметра  $\varepsilon$  от 0 до  $\varepsilon_0$  период  $T(\varepsilon)$  периодического решения  $u_0(t, \varepsilon)$  изменяется от  $2\pi\omega^{-1}$  до  $2\pi\omega^{-1}(1 + \varepsilon\varphi_0\omega^{-1} + o(\varepsilon^2))$ , длина которого близка к  $2\pi\omega^{-2}\varphi_0\varepsilon_0$ . Заметим, что функция  $u_0(t, \varepsilon)$  одновременно является решением уравнения

$$\dot{u} = \lambda[1 - \alpha u - (1 - \alpha)u(t - nT(\varepsilon))]u.$$

Проведем нормировочные замены  $t \rightarrow (1 + nT(\varepsilon))t$  и  $u((1 + nT(\varepsilon))t) = V(t)$ . В результате приходим для функции  $V$  к тому же самому уравнению (3) с той лишь разницей, что вместо коэффициента  $\lambda$  стоит коэффициент  $\lambda_n = \lambda(1 + nT(\varepsilon))$ . Это уравнение имеет периодическое решение  $V_n(t, \varepsilon) = u_0((1 + nT(\varepsilon))t, \varepsilon)$  периода  $T_n(\varepsilon) = T(\varepsilon)(1 + nT(\varepsilon))^{-1}$ . И оно заведомо существует при всех  $\lambda \in \{(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1)(1 + nT(\varepsilon)), 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ . Отсюда непосредственно вытекает, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) количество периодических решений уравнения (3) неограниченно растет.

## 2. Построение квазинормальных форм при больших значениях параметра $\lambda$

Здесь продолжено изучение локальной — в малой окрестности  $u_0 \equiv 1$  — динамики уравнения (3). Основное предположение состоит в том, что выполнено условие

$$\lambda^{-1} = \varepsilon \ll 1.$$

В этом случае  $\alpha_0 = 1/2$ . Как уже отмечалось, в рассматриваемой ситуации вещественные части бесконечно многих корней характеристического уравнения (4) стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Стандартные методы изучения локальной динамики, основанные на теории инвариантных многообразий и теории нормальных форм, оказываются непосредственно неприменимыми. Будут использоваться методики, разработанные в [5–9]. Остановимся на наиболее простом случае, когда параметр  $\nu$  имеет по  $\varepsilon$  порядок  $\varepsilon^2$ .

**Медленно осциллирующие решения.** Положим здесь

$$\nu = c\varepsilon^2 \quad (15)$$

и выпишем асимптотику (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) тех корней  $\lambda_k(\varepsilon)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) уравнения (4), вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Стандартными методами получим, что

$$\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_{k_0} + \varepsilon \lambda_{k_1} + \varepsilon^2 \lambda_{k_2} + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{k_0} &= \pi(2k+1)i, \\ \lambda_{k_1} &= -2\pi(2k+1)i, \\ \lambda_{k_2} &= -2\pi^2(2k+1)^2 + 4\pi(2k+1)i - 2c. \end{aligned}$$

Функции  $\text{const} \cdot \exp(\lambda_k(\varepsilon)t)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) являются решениями линейного уравнения (7). Их можно записать в виде произведения медленно осциллирующей по времени (т.е. зависящей от  $\tau = \varepsilon^2 t$ ) функции на осциллирующую (периодическую) функцию:  $\xi(\tau) \exp[i\pi(2k+1)(1-2\varepsilon)t]$ .

Следуя методике [5–8], введем в рассмотрение формальный ряд

$$v = \varepsilon^{1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp[i(2k+1)\pi y] + \varepsilon^2 v_1(\tau, y) + \varepsilon^{5/2} v_2(\tau, y) + \dots,$$

в котором  $y = (1-2\varepsilon)t$  и зависимость от  $y$  функций  $v_i(\tau, y)$  — периодическая. Удобно ввести еще одно обозначение. Положим

$$\xi(\tau, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp[i\pi(2k+1)y].$$

Тогда

$$v(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^2 v_1(\tau, y) + \varepsilon^{5/2} v_2(\tau, y) + \dots \quad (16)$$

Положим затем в (3)  $u = 1 + v$ . В результате для  $v(t)$  получаем уравнение

$$\varepsilon \dot{v} = -\frac{1}{2}[v + v(t-1) + c\varepsilon^2(v - v(t-1))](1+v). \quad (17)$$

Подставим (16) в (17) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На втором шаге приходим к соотношению

$$v_1(\tau, y) = -\xi(\tau, y) \frac{\partial \xi(\tau, y)}{\partial y}.$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{5/2}$ , получаем уравнение для определения  $v_2(\tau, y)$ . Из условия разрешимости этого уравнения приходим к уравнению для определения неизвестной амплитуды  $\xi(\tau, y)$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - c\xi + \xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (18)$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, y + 1) \equiv -\xi(\tau, y). \quad (19)$$

Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть краевая задача (18), (19) имеет при всех  $\tau > \tau_0$  ограниченное вместе с производными по  $\tau$  и по  $y$  решение  $\xi_0(\tau, y)$ . Тогда уравнение (17) имеет асимптотическое по невязке с точностью до  $O(\varepsilon^{5/2})$  решение  $v_0(t, \varepsilon)$ , для которого

$$v_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \xi_0(\tau, y) - \varepsilon^2 \xi_0^2(\tau, y) \frac{\partial \xi_0(\tau, y)}{\partial y}$$

$$\text{и } \tau = \varepsilon^2 t, \quad y = (1 - 2\varepsilon)t.$$

Отметим, что в некоторых случаях, например, для состояний равновесия или периодических по времени решений (18), (19), удастся получить утверждение о существовании близкого к нему точного решения (17) и исследовать вопросы устойчивости.

### 3. Локальный анализ состояния равновесия

Рассмотрим краевую задачу (18), (19). В ней удобно выполнить замены  $\tau_1 = 2\tau$ ,  $x = y - 2\tau$  и  $\alpha = -c$ . Затем обратно переобозначим  $\tau_1$  на  $\tau$  и получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \alpha \xi + \xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (20)$$

с антипериодическими краевыми условиями:

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv -\xi(\tau, x). \quad (21)$$

Следующее утверждение описывает поведение решений (20), (21), а значит, и уравнения (17) при  $\alpha < 0$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha < 0$  и пусть решение краевой задачи (20), (21) определено при всех  $\tau \geq \tau_0$  и является непрерывно дифференцируемым по  $\tau$  и  $y$ . Тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^2 \xi^2(\tau, y) dy = 0.$$

Для доказательства теоремы достаточно умножить (20) на  $\xi(\tau, y)$  и проинтегрировать от 0 до 2 по  $y$  (с учетом (21)).

Характеристическое уравнение для линеаризованной на нулевом состоянии равновесия (20), (21) краевой задачи имеет вид:

$$\mu = -k^2\pi^2 + \alpha, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (22)$$

При условии  $\alpha < \pi^2$  все корни характеристического уравнения (22) отрицательные. Отсюда следует, что при всех указанных значениях  $\alpha$  нулевое состояние равновесия краевой задачи (20), (21) асимптотически устойчиво. При выполнении неравенства  $\alpha > \pi^2$  характеристическое уравнение (22) имеет положительный корень, поэтому нулевое решение в (20), (21) неустойчиво.

Рассмотрим «критический» случай, когда параметр  $\alpha$  близок к  $\pi^2$ . Положим

$$\alpha = \pi^2 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (23)$$

При  $\varepsilon = 0$  характеристическое уравнение (22) имеет два нулевых корня, которым отвечают две группы стационарных решений  $\cos \pi x$  и  $\sin \pi x$  линеаризованного уравнения. В этом случае малой, но не зависящей от  $\varepsilon$ , окрестности состояния равновесия краевой задачи (20), (21) имеется двумерное устойчивое локальное интегральное инвариантное многообразие [11, 12]. На этом многообразии краевая задача представима в виде системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [13]. Для их построения используем стандартные методы бифуркационного анализа (см., например, [14]).

Специфика рассматриваемой ситуации такова, что имеется несколько вырождений. Так, нелинейность в (20) содержит только кубическое слагаемое (квадратичные слагаемые отсутствуют). Кроме этого, как оказывается, вещественная часть ляпуновской величины [15] равна нулю. Поэтому систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений на двумерном многообразии можно представить в виде одного скалярного комплексного уравнения для некоторой величины  $v(s)$ , где  $s = \sqrt{\varepsilon}\tau$ :

$$\frac{dv(s)}{ds} = iq_1|v(s)|^2v(s) + \sqrt{\varepsilon}(q_2v(s) + q_3|v(s)|^4v(s)). \quad (24)$$

Здесь  $q_1, q_2, q_3$  – параметры, которые необходимо определить. Решения уравнения (24) и краевой задачи (20), (21) связаны соотношением:

$$\xi(\tau, s, x) = \varepsilon^{1/4}[v(s)e^{i\pi x} + \bar{v}(s)e^{-i\pi x}] + \varepsilon^{1/2}\xi_1 + \varepsilon^{3/4}\xi_2 + \varepsilon\xi_3 + \varepsilon^{5/4}\xi_4 + \dots \quad (25)$$

Подставляя формальный ряд (25) в (20), (21), будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ .

Учитывая, что в правой части задачи (20) имеется лишь кубическая нелинейность, все коэффициенты при нечетных степенях разложения (25) могут быть выбраны нулевыми, т.е.  $\xi_1 \equiv 0$ ,  $\xi_3 \equiv 0$  и т.д.

При  $\varepsilon^{1/4}$  имеет место верное тождество.

При  $\varepsilon^{3/4}$  получается краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} = & \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} + \pi^2 \xi_2 + e^{3i\pi x} i\pi v^3(s) - e^{-3i\pi x} i\pi \bar{v}^3(s) + e^{i\pi x} \left( -\frac{\partial v(s)}{\partial s} + i\pi v^2(s)\bar{v}(s) \right) + \\ & + e^{-i\pi x} \left( -\frac{\partial \bar{v}(s)}{\partial s} - i\pi v(s)\bar{v}^2(s) \right), \quad \xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x). \end{aligned} \quad (26)$$



Из условий разрешимости задачи (26) в классе ограниченных по  $\tau$  функций, с учетом (24), имеем

$$q_1 = \pi. \quad (27)$$

При условии (27) будем искать  $\xi_2$  в виде третьих гармоник по  $x$ . Тогда нетрудно увидеть, что

$$\xi_2 = \frac{iv(s)^3}{8\pi}e^{3i\pi x} + \frac{-i\bar{v}^3(s)}{8\pi}e^{-3i\pi x}. \quad (28)$$

Наконец, при  $\varepsilon^{5/4}$  получается краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tau} = & \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x^2} + \pi^2 \xi_4 + e^{i\pi x} \left( -\frac{v(s)^3 \bar{v}^2(s)}{8} + v(s) \right) + e^{-i\pi x} \left( -\frac{v^2(s) \bar{v}^3(s)}{8} + \bar{v}(s) \right) + \\ & + e^{3i\pi x} \left( -\frac{3iv^2(s) \frac{\partial v(s)}{\partial s}}{8\pi} - \frac{3v^4(s) \bar{v}(s)}{4} \right) + e^{-3i\pi x} \left( \frac{3i\bar{v}^2(s) \frac{\partial \bar{v}(s)}{\partial s}}{8\pi} - \frac{3v(s) \bar{v}^4(s)}{4} \right) - \\ & - \frac{5v^5(s)e^{5i\pi x}}{8} - \frac{5\bar{v}^5(s)e^{-5i\pi x}}{8}, \quad \xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x). \end{aligned} \quad (29)$$

Из условия разрешимости задачи (29) с учетом (24) получаем:

$$q_2 = 1, \quad q_3 = -\frac{1}{8}. \quad (30)$$

Выпишем нормальную форму

$$\frac{dv(s)}{ds} = i\pi v^2(s) \bar{v}(s) + \sqrt{\varepsilon} \left( v(s) - \frac{1}{8} v^3(s) \bar{v}^2(s) \right). \quad (31)$$

Выполним полярную замену  $v(s) = \rho(s)e^{i\delta(s)}$  в (31) и получим

$$\frac{d\rho}{ds}e^{i\delta} + i\frac{d\delta}{ds}\rho e^{i\delta} = i\pi\rho^3e^{i\delta} + \rho e^{i\delta}\sqrt{\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{8}\rho^4\right). \quad (32)$$

Выделим действительную и мнимую части:

$$\frac{d\rho}{ds} = \rho\sqrt{\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{8}\rho^4\right), \quad (33)$$

$$\frac{d\delta}{ds} = \pi\rho^2. \quad (34)$$

Учитывая, что уравнения в системе (33), (34) разделились (первое уравнение не зависит от второй переменной), определим устойчивое решение уравнения (33). Нетрудно видеть, что глобально устойчивым неотрицательным состоянием равновесия этого уравнения является значение

$$\rho_* = \sqrt[4]{8}. \quad (35)$$

Тогда из второго уравнения системы имеем

$$\delta_* = \pi\sqrt{8\varepsilon}\tau + \gamma, \quad (36)$$

где  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

Подставляя формулы (35), (36) в ряд (25), получим асимптотику устойчивого цикла исследуемой краевой задачи:

$$\xi \approx 2\sqrt[4]{8\varepsilon} \cos(\pi x + \pi\sqrt{8\varepsilon}\tau + \gamma) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (37)$$

Выполнена следующая теорема о соответствии.

**Теорема 4.** *Найдется такое положительное значение  $\varepsilon_0$ , что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  краевая задача (20), (21) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл с асимптотикой (37).*

## 4. Численный анализ

Перейдем к численному анализу разностной аппроксимации краевой задачи (20), (21). Как и в работе [16], заменим вторую и первую производные по пространственной переменной соответствующими разделенными разностями и перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial \tau} = N^2(\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1}) + \alpha\xi_j + 2N\xi_j^2(\xi_{j+1} - \xi_{j-1}), \quad (38)$$

где  $j = 1, \dots, N$ . Натуральное число  $N$  представляет собой количество частей, на которое разбит промежуток изменения пространственной переменной. Условие антипериодичности в этом случае дает:

$$\xi_0 = -\xi_N \text{ и } \xi_{N+1} = -\xi_1. \quad (39)$$

Рассмотрим задачу об устойчивости состояния равновесия задачи (38), (39). Для этого линеаризуем ее в нуле (отбросив кубическую нелинейность) и выполним эйлерову замену  $\xi_j = e^{\lambda t} \sin(\pi j/N)$ , получим:

$$\lambda \sin \frac{\pi j}{N} = N^2 \left( \sin \frac{\pi(j+1)}{N} - 2 \sin \frac{\pi j}{N} + \sin \frac{\pi(j-1)}{N} \right) + \alpha \sin \frac{\pi j}{N}. \quad (40)$$

Упростив выражение (40), получим оценку критического значения  $\alpha$ :

$$\alpha_{\text{кр}} = 2N^2 \left( \cos \frac{\pi}{N} - 1 \right). \quad (41)$$

Отметим, что при  $N \rightarrow \infty$  критическое значение  $\alpha$  стремится к  $\pi^2$ .

В таблице 1 приведено отклонение критического значения  $\alpha$  особой точки разностной схемы от особой точки краевой задачи (20), (21) при различных значениях параметра  $N$ .

Как видно из приведенной таблицы, при увеличении количества уравнений в разностной схеме критическое значение разностной схемы приближается к критическому значению исходной задачи и для ста уравнений составляет чуть больше, чем восемь десятитысячных.

**Приведем результаты численных расчетов** для определения зависимости максимальных значений амплитуды  $A$  (рис. 1) и периода  $T$  (рис. 2) колебаний решения краевой задачи (20), (21) от параметра  $\varepsilon$ . Отметим, что увеличение параметра

Кол-во уравнений ( $N$ )	10	20	50	100
$\alpha_{кр}$	9,78870	9,84933	9,86636	9,86879
$\pi^2 - \alpha_{кр}$	0,08091	0,02028	0,00325	0,00081

Таблица 1. Отклонение критического значения  $\alpha$  особой точки разностной схемы от особой точки краевой задачи (20), (21) при различных значениях параметра  $N$ .

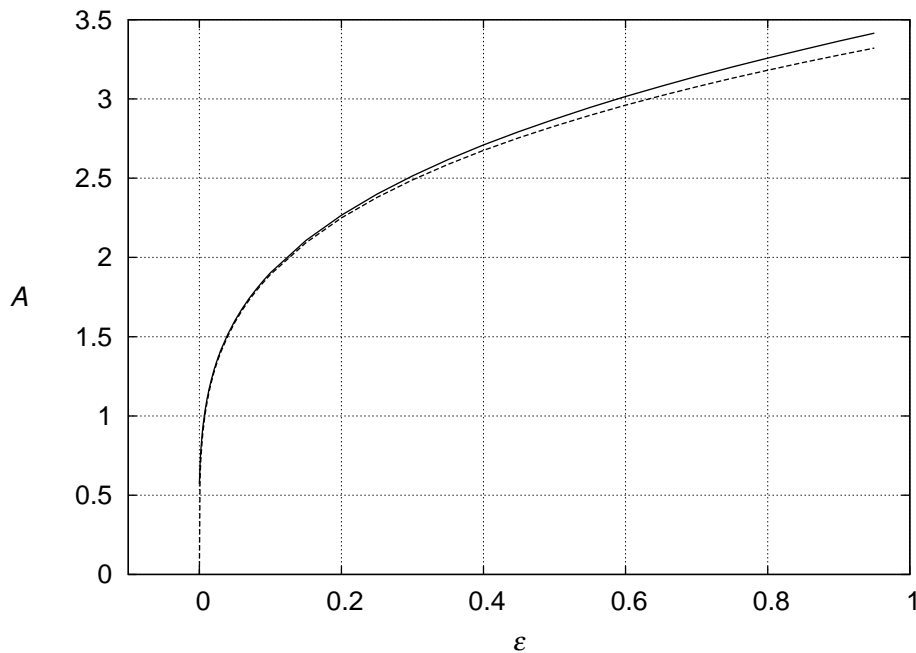


Рис. 1. Сплошной линией нанесено значение амплитуды при численных расчетах. Прерывистой линией нанесено аналитически полученное значение амплитуды

$\varepsilon$  приводит к серьезным изменениям периода и частоты колебания решения задачи (см. рис. 3).

При проведении вычислений количество уравнений ( $N$ ) в разностной модели (38),(39) было равно ста.

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений применялся метод Дормана–Принса [17] с переменной длиной шага (DORPRI853). Параметры работы численного метода — максимальная длина шага, минимальная длина шага, абсолютная погрешность, относительная погрешность — выбраны соответственно  $1/10$ ,  $10^{-10}$ ,  $10^{-12}$ ,  $10^{-12}$ .

Система (38),(39) решалась на промежутке времени  $\tau \in [0, 101000]$ . Величина промежутка времени выбиралась «достаточно» большой из тех соображений, чтобы решение задачи успело выйти на аттрактор. Максимальные значения амплитуды  $A$  и периода  $T$  измерялись при  $\tau \in [100000, 101000]$ . Длина промежутка измерений выбиралась таким образом, чтобы на нем помещалось несколько периодов.

При небольших значениях  $\varepsilon$ , как и ожидалось, асимптотический анализ дает очень хорошие результаты. В рамках его применимости колебательный режим близок к синусоидальному.

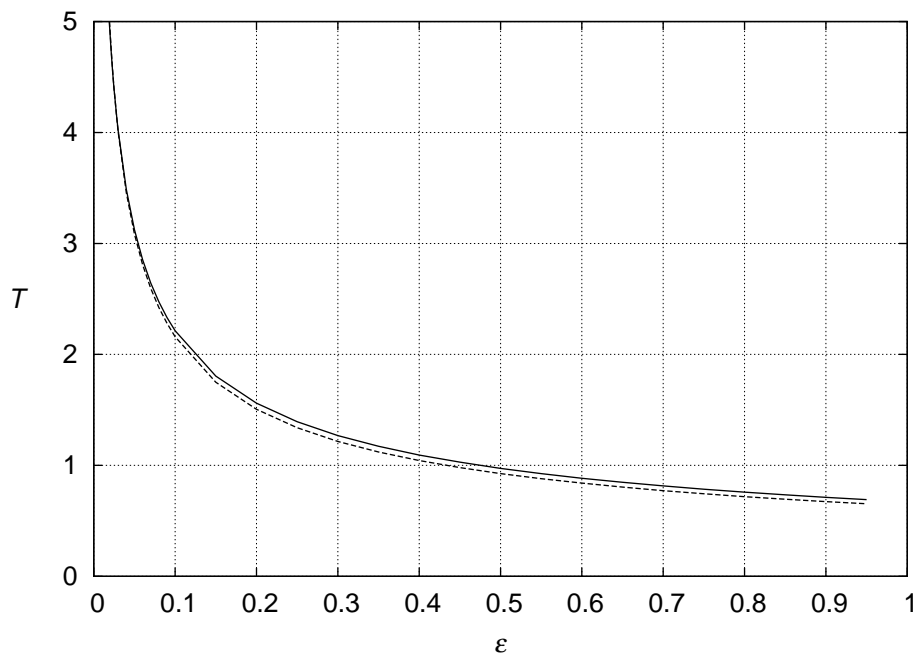


Рис. 2. Сплошной линией нанесено значение периода при численных расчетах. Прерывистой линией нанесено аналитически полученное значение периода

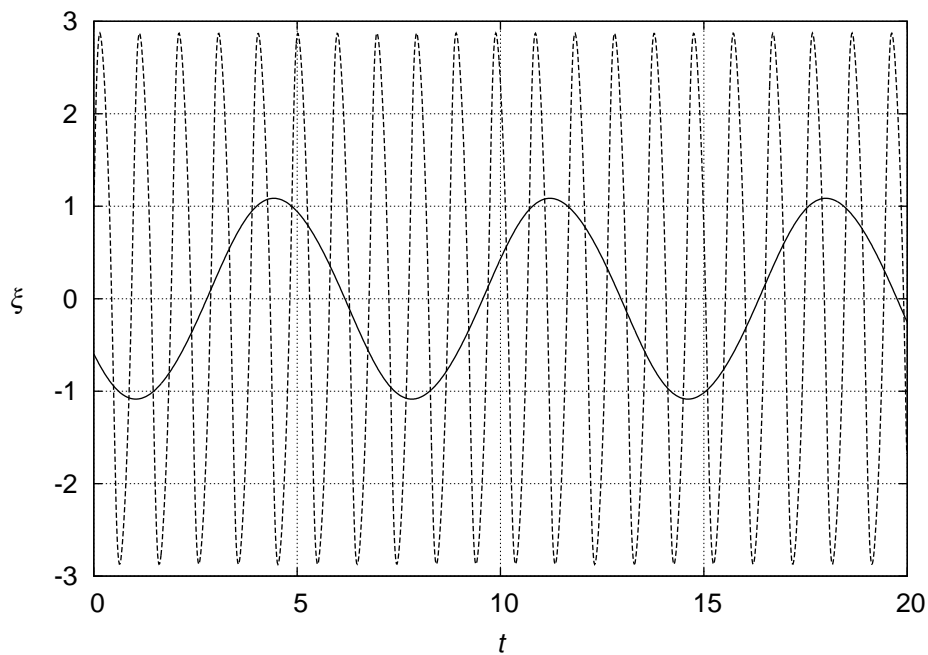


Рис. 3. Увеличение частоты и амплитуды колебаний при увеличении параметра  $\varepsilon$ . Сплошная линия  $\varepsilon = 0,01$ , пунктирная  $\varepsilon = 0,5$ . Выполнен сдвиг по времени  $t = \tau - 100980$

При увеличении параметра  $\alpha$  локальный анализ становится неприменим. При этом ранее полученный цикл изменяет свой вид и делается релаксационным. Про-

екция данного цикла на плоскость  $\xi_1$  и  $\xi_{31}$  представлена на рисунке 5. Номера уравнений разностной модели выбраны случайно.

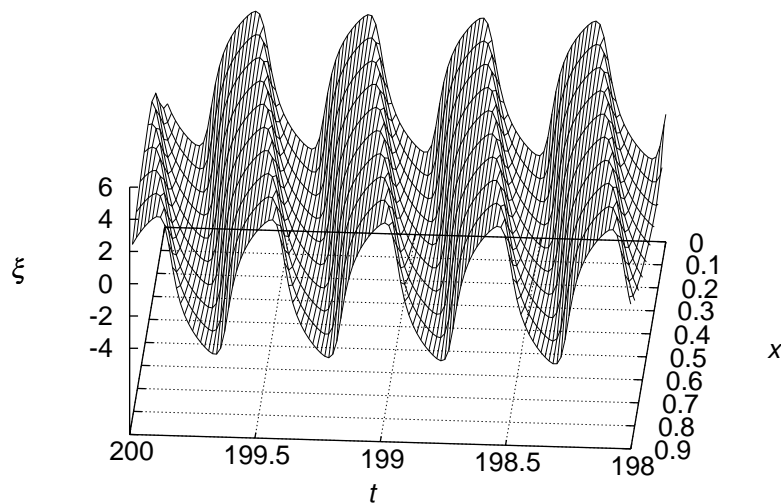


Рис. 4. Бегущая волна при  $\varepsilon = 2$

На рисунке 4 представлен трехмерный график колебаний решения изучаемой краевой задачи при значении  $\varepsilon = 2$ . Как видно из рисунка, поверхность образованная решением, представляет собой так называемый режим «бегущей волны».

## Выводы

Динамические свойства логистического уравнения, содержащего запаздывание (3), существенно отличаются от динамических свойств логистического уравнения (1) и логистического уравнения с запаздыванием (2). При  $\alpha > 1/2$  состояние равновесия  $u_0 \equiv 1$  устойчиво при всех положительных  $\lambda$ . При  $0 < \alpha < 1/2$  могут возникать бифуркационные явления при достижении параметром  $\lambda$  некоторого порогового значения  $\lambda(\alpha)$ .

При  $\alpha \sim 1/2$  и  $\lambda \gg 1$  локальные динамические свойства описываются нелокальным поведением решений специальной нелинейной краевой задачи параболического типа (20), (21). Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия.

- При значениях  $\alpha < 0$  все решения стремятся к нулю.
- При  $0 < \alpha < \pi^2$  аналитически установлено, что нулевое состояние равновесия устойчиво, и соответственно при численном анализе получено, что все решения стремятся к нулю.

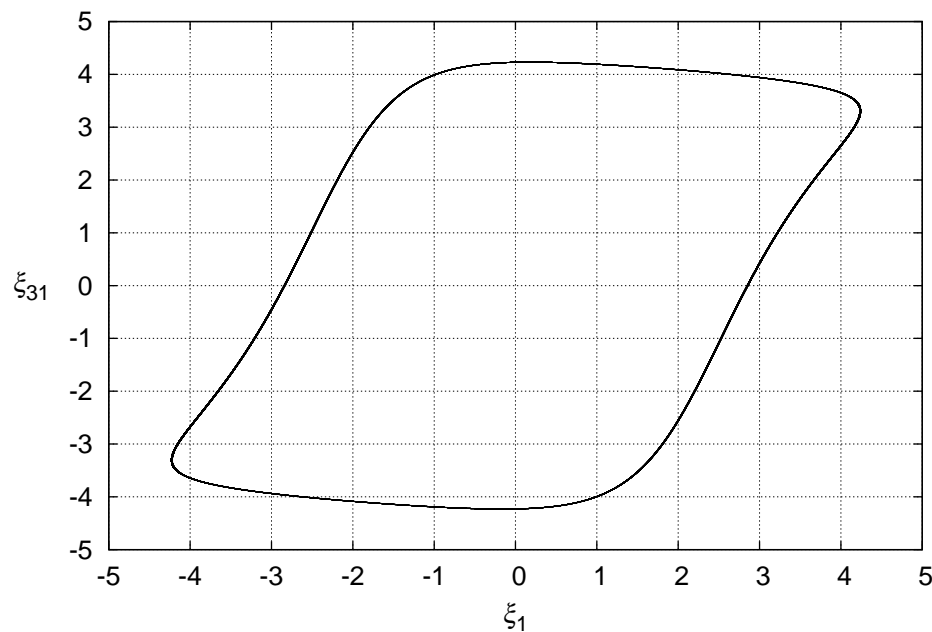


Рис. 5. Фазовое пространство  $\xi_1$  и  $\xi_{31}$  при  $\varepsilon = 2$

- При  $\alpha = \pi^2 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) — из состояния равновесия рождается устойчивый цикл. Приведена его асимптотика.
- При  $\alpha > \pi^2$  — численные исследования показали, что имеется единственное устойчивое периодическое решение. При достаточно больших  $\alpha$  ( $\alpha \approx \pi^2 + 2$ ) этот цикл имеет релаксационную структуру.

Отметим, что наблюдается хорошее совпадение результатов численного моделирования и утверждений аналитического характера при значениях  $\varepsilon \in (0, 1)$  (рис. 1–3).

Авторы выражают благодарность Глызину С.Д. за полезное обсуждение результатов настоящей работы.

## Список литературы

1. *Kakutani S., Markus L.* On the non-linear difference-differential equation  $y'(t) = (a - by(t - \tau))y(t)$ . Contributions to the theory of non-linear oscillations // Ann. Math. Stud. Princeton University Press. Princeton, 1958. Vol. IV. P. 1–18.
2. *Jones G.S.* The existence of periodic solutions of  $f'(x) = -\alpha f(x - 1)[1 + f(x)]$  // T. Math. Anal. and Appl. 1962. Vol. 5. P. 435–450.
3. *Kashchenko S.A.* Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation // Automatic Control and Computer Science. 2013. Vol. 47, No 7. P. 470–494.
4. *Кащенко С.А.* О периодических решениях уравнения  $x'(t) = -lx(t - 1)[1 + x(t)]$  // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1978. С. 110–117. (*Kashchenko S.A.* O periodicheskikh resheniyakh uravneniya  $x'(t) = -lx(t - 1)[1 + x(t)]$ )

- // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl: YarGU, 1978. S. 110–117 [in Russian]).
5. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, №8. С. 1448–1451. (*Kashchenko S.A.* Primenenie metoda normalizatsii k izucheniyu dinamiki differentsialno-raznostnykh uravneniy s malym mnozhitelem pri proizvodnoy // Dif. uravneniya. 1989. T. 25, №8. S. 1448–1451 [in Russian]).
  6. *Kaschenko S.A.* Normalisation in the systems with small diffusion // Int. J. of Bifurcation and chaos. 1996. V. 6, №7. P. 1093–1109.
  7. *Кащенко С.А.* Уравнения Гинзбурга–Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38. №3. С. 457–465. (English transl.: *Kashchenko S.A.* The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998. 38:3. P. 443–451).
  8. *Кащенко И.С.* Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421, №5. С. 586–589. (English transl.: *Kashchenko I.S.* Asymptotic analysis of the behavior of solutions to equations with large delay // Doklady Mathematics. 2008. Vol. 78, №1. P. 570–573).
  9. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. №1. С. 76–89. (English transl.: *Glyzin S.D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Extremal dynamics of the generalized Hutchinson equation Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2009. V. 49, № 1. P. 71–83.)
  10. *Глызин С.Д.* Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 3. С. 29 – 42. (*Glyzin S. D.* A registration of age groups for the Hutchinson’s equation // Modeling and Analysis of Information Systems. 2007. V. 14, № 3. P. 29 – 42 [in Russian]).
  11. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations // Springer-Verlag, 1977.
  12. *Hartman Ph.* Ordinary differential equations // New York, Wiley, 1964.
  13. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. (*Bruno A.D.* Lokalnyy metod nelineynogo analiza differentsialnykh uravneniy. M.: Nauka, 1979 [in Russian]).
  14. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю.* Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 92 с. (*Glyzin S.D., Kolesov A. Yu.* Lokalnye metody analiza dinamicheskikh sistem: uchebnoe posobie. Yaroslavl: YarGU, 2006. 92 с. [in Russian]).
  15. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. (*Bautin N.N., Leontovich E.A.* Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti. M.: Nauka, 1990 [in Russian]).

16. Глызин С. Д. Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96–116. (Glyzin S. D. Difference approximations of “reaction – diffusion” equation on a segment // Modeling and Analysis of Information Systems. 2009. V. 16, № 3. P. 96 – 116 [in Russian]).
17. Hairer E., Wanner G., Norsett S.P. Solving Ordinary Differential Equations 1 (Springer Series in Computational Mathematics): Nonstiff Problems. 2ed., revised, Springer, 2008.

## Local Dynamics of a Logistic Equation with Delay

Aleshin S. V., Kaschenko S. A.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

**Keywords:** logistic equation, relaxation cycle, normal form, equilibrium state

We considered a logistic equation with delay and studied its local dynamics. The critical cases have been found in the problem of the equilibrium state stability. We applied standard Andronov-Hopf bifurcation methods for delay differential equations and an asymptotic method, developed by one of the authors, based on the construction of special evolution equations that define the local dynamics equations with delay. It is shown that all solutions of the equation tend to an equilibrium state or result in a single stable cycle. The results of numerical modelling are presented in this paper. The study has proved that analytical and numerical modeling results have a good correlation.

### Сведения об авторах:

**Алешин Сергей Владимирович,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ассистент;

**Кащенко Сергей Александрович,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой